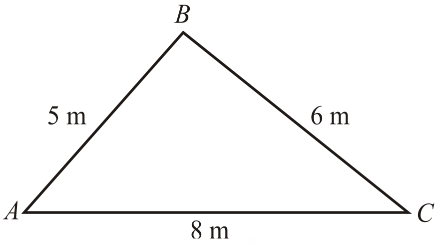
Junio 2017. Recuperaciones

Bloque 1. Trigonometría y complejos

1. Calcula $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ en el siguiente triángulo:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$6^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos\hat{A}$$

$$36 = 64 + 25 - 80 \cdot \cos\hat{A}$$

$$\cos\hat{A} = \frac{36-64-25}{-80} = 0'6625$$

$$\hat{A} = \boxed{48'51^\circ}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{b^2-a^2-c^2}{-2ac} = \frac{8^2-6^2-5^2}{-2 \cdot 6 \cdot 5} = -0'05$$

$$\hat{B} = \boxed{92'87^\circ}$$

$$\hat{C} = 180 - 92'87 - 48'51 = \boxed{38'62^\circ}$$

2. Demuestra que: $\cos(x+45^\circ)\cdot\cos(x-45^\circ)=\frac{1}{2}\cos 2x$

$$(\cos x \cos 45 - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, 45)(\cos x \cos 45 + \text{sen}\, x\, \text{sen}\, 45) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}\cos x}{2} - \frac{\sqrt{2}\,\text{sen}\, x}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\cos x}{2} + \frac{\sqrt{2}\,\text{sen}\, x}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}\cos x}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}\,\text{sen}\, x}{2}\right)^2 = \frac{2\cos^2 x}{4} - \frac{2\,\text{sen}^2 x}{4} = \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x$$

Otra versión:

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\cos(x+45)\cdot\cos(x-45) = \frac{\cos 2x + \cos 90}{2} = \frac{\cos 2x}{2}$$

3. Resolver la ecuación: 1 + cosx + cos2x = 0.

$$1 + \cos x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos x + 2\cos^2 x = 0$$

$$\cos x\,(1 + 2\cos x) = 0$$

$$\cos x = 0\ ;\quad x = \cos^{-1} 0 = \begin{cases} \boxed{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \\ \boxed{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi} \end{cases}$$

$$1 + 2\cos x = 0,\quad \cos x = \frac{-1}{2} = \begin{cases} \boxed{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi} \\ \boxed{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi} \end{cases}$$

4. Calcula: $\sqrt[4]{-81}$ y represéntalas.

Solución:

Pasamos el radicando a forma polar.

El modulo es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-81)^2 + 0^2} = 81$

El ángulo es $\alpha = arctg\,\dfrac{b}{a} = arctg\,\dfrac{0}{-81} = arctg 0 = 180^o$

Las raíces, por tanto, son: $\sqrt[4]{81_{180^o}} = \sqrt[4]{81}_{\frac{180^o + 360^o \cdot k}{4}} = 3_{45^o + 90^o \cdot k}; k = 0, 1, 2, 3$

$\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81_{180^\circ}} = 3_{\frac{180^\circ + 360^\circ k}{4}} = 3_{45^\circ + 90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3$

Las raíces son: $3_{45^\circ}; \quad 3_{135^\circ}; \quad 3_{225^\circ}; \quad 3_{315^\circ}$

La representación de ellas:

Bloque 2. Geometría plana

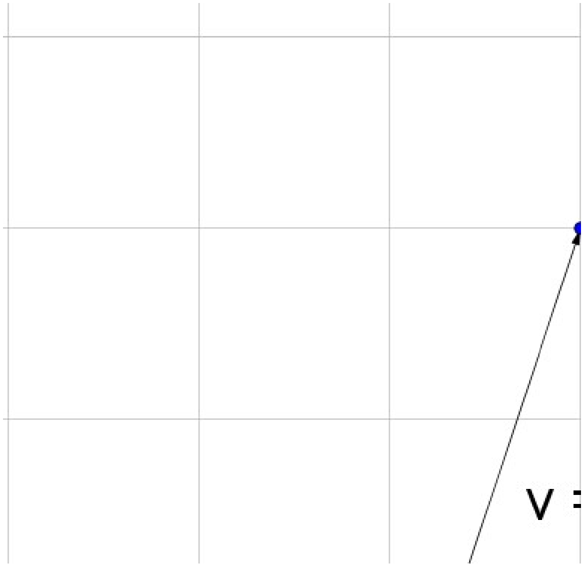
5. Dados los vectores: $\vec{a}(5,-2)\ y\ \vec{b}(1,3)$.

a. Dibuja los vectores en un sistema de referencia ortonormal.

b. Halla el ángulo que forman los vectores: $\vec{a}\ y\ \vec{b}$

c. Calcula el área del triángulo que determinan.

Solución:

a. 

b. b) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{(5,-2)\cdot(1,3)}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{5-6}{\sqrt{290}}=\dfrac{-1}{\sqrt{290}}\rightarrow\alpha=\cos^{-1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{290}}\right)=93'37^{o}$

c. c) $A=\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}\sqrt{10}\sqrt{29}\sin\alpha=8'5$

6. Responder a los siguientes apartados:

a. Hallar la distancia entre los puntos A(3, 1) y B(7, –5)

b. Hallar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos anteriores.

c. Hallar la mediatriz del segmento AB

d. Determinar el ángulo que forman dicha recta con 3x + 4y - 12 = 0.

Solución:

a. $d(A,B)=\sqrt{(7-3)^2+(-5-1)^2}=\sqrt{4^2+(-6)^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}$

b. r: A(3, 1); $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(7,-5)-(3,1)=(4,-6)$

r: $v_2x-v_1y+C=0;\ -6\cdot 3-4\cdot 1+C=0; C=22$

Luego, r: -6x - 4y + 22 = 0; simplificando: 3x + 2y -11=0

c. Para calcular la mediatriz, calculamos primero el punto medio:

$$M=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)=\left(\frac{3+7}{2},\frac{1-5}{2}\right)=(5,-2)$$

Luego, la perpendicular por dicho punto:

$\vec{n}=\vec{v}(4,-6);\ \mathrm{n}_1x+n_2y+C=0;\ 4x-6y+C=0$

$4\cdot 5-6\cdot(-2)+C=0;\ C=-32;\ 4x-6y-32=0;\ \text{simplificando: } 2x-3y-16=0$

d. $$\begin{cases} 3x+2y-11=0;\ y=\dfrac{-3x+11}{2};\ m=\dfrac{-3}{2} \\ 3x+4y-12=0;\ y=\dfrac{-3x+12}{4};\ m'=\dfrac{-3}{4} \end{cases}$$

$$\mathrm{tg}\,\gamma=\left|\mathrm{tg}(\alpha-\beta)\right|=\left|\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}\right|=\left|\frac{m-m'}{1+m\cdot m'}\right|=\left|\frac{\frac{-3}{2}-\left(\frac{-3}{4}\right)}{1+\frac{-3}{2}\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)}\right|=\frac{6}{17}$$

$$\gamma=tg^{-1}\left(\frac{6}{17}\right)=19'44^{\text{o}}$$

7. Los vértices de un paralelogramo son: A(1, 2); B(5, 3); C(6, 5) y D(2, 4)

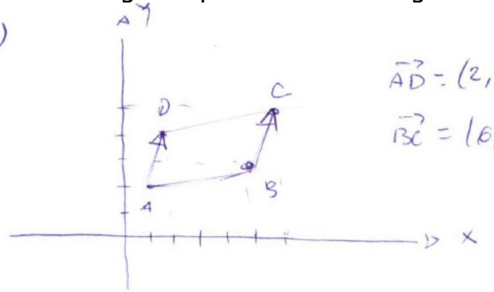
a) Demostrar que es un paralelogramo (lados paralelos dos a dos) razonando vectorialmente o por ecuaciones. Dibújalo.

b) Halla las ecuaciones de las rectas que forman las diagonales.

c) Hallar el punto de corte de las diagonales. Demuestra que es el punto medio de la diagonal. Basta probarlo para una.

d) Hallar los ángulos que forman las diagonales al cortarse.

a)



$\vec{AD} = (2,4)-(1,2) = (1,2)$ ✓

$\vec{BC} = (6,5)-(5,3) = (1,2)$

b) AC : A(1,2)

$\vec{v} = \vec{AC} = (6,5)-(1,2) = (5,3)$

$3x-5y+C=0$; $3\cdot1-5\cdot2+C=0$; $C=7$

$\boxed{3x-5y+7=0}$

BD : B(5,3)

$\vec{v} = \vec{BD} = (2,4)-(5,3) = (-3,1)$

$x+3y+C=0$; $5+3\cdot3+C=0$; $C=-14$

$\boxed{x+3y-14=0}$

c) $\begin{cases} 3x-5y+7=0 \\ x+3y-14=0 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 3x-5y+7=0 \\ -3x-9y+42=0 \\ \hline -14y+49=0 \end{array}$$

$-14y+49=0$; $y=\frac{-49}{-14}=\frac{7}{2}$

$x+3\cdot\frac{7}{2}-14=0$; $x=14-\frac{21}{2}=\frac{28-21}{2}=\frac{7}{2}$ $\boxed{M\left(\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)}$

d) $\cos(\hat{r},\hat{s}) = \left|\frac{(5,3)(-3,1)}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{10}}\right| = \left|\frac{-15+3}{\sqrt{340}}\right| = \frac{12}{\sqrt{340}}$; $(\hat{r},\hat{s}) = \boxed{49'4^\circ}$

8. a) Hallar el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

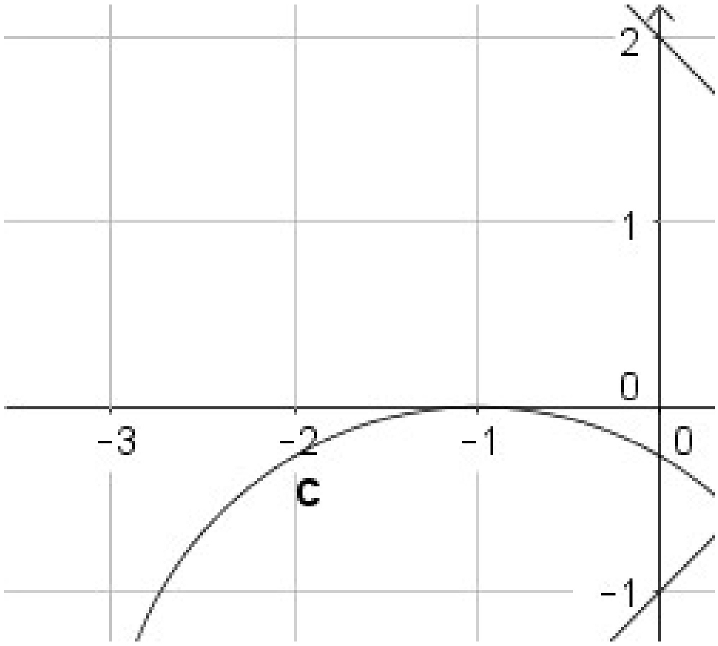
b) Hallar la distancia del centro a la recta r: $x + y = 2$. ¿Cuál es su posición relativa de la recta y la circunferencia?

Solución:

a) $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$ $\begin{cases} A = -2a \\ B = -2b \\ C = a^2 + b^2 - r^2 \end{cases}$

2 = -2a; a = -1; 4=-2b; b= -2; O(-1, -2) $1 = (-1)^2 + (-2)^2 - r^2; r^2 = 4; r = \sqrt{4} = 2$

b) $d(O,r) = \left| \frac{Ao_1 + Bo_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{-1-2-2}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 2.$ Recta exterior.



Bloque 3. Análisis

9. a) Hallar el dominio de esta función.
b) Estudiar la continuidad de esta función. Si tiene discontinuidades decir de qué tipo son.
c) Represéntala razonadamente:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\in[-3,0) \\ x^2-2x+1 & x\in[0,3] \\ 4 & x\in(3,7) \end{cases}$$

Solución:

a. D = [-3, 7)
b. Es una función definida a trozos. Las tres formulas son de funciones continuas. Luego tenemos que estudiar solo la continuidad en los puntos de unión de los trozos.
Una función es continua en *x = a* si se cumple: $f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)$

- Veamos en *x = 0*

$$f(0)=0^2-2\cdot 0+1=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2-2x+1=0^2-2\cdot 0+1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x+1=0+1=1$$

Tenemos, pues, continuidad en dicho punto.

- Veamos en *x = 3*

$$f(3)=3^2-2\cdot 3+1=4$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 4=4$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} 3^2-2\cdot 3+1=4$$

Tenemos continuidad también en dicho punto.
Finalmente, la función es continua en todo su dominio.

c. La primera parte es una recta, luego necesitamos dos puntos.
La segunda es una parábola, luego necesitamos el vértice y algunos puntos auxiliares.
Vértice: $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-2)}{2\cdot 1}=2$
La tercera parte es una función constante, luego no necesitamos ningún cálculo especial.
La table de valores podría ser algo así, según las observaciones anteriores:

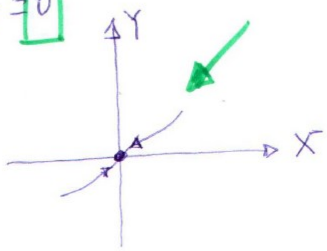
x	y	Part
-3	-2	Straight line
-1	0	
1	0	Parabola
0	1	
3	4	
4	4	Constant function
5	4	

10. Halla los siguientes límites e indica que información me dan sobre la función o su gráfica. Haz un dibujo que ilustre el resultado obtenido en cada caso.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{-x^2-x}{3x^2+6x+3}\quad b)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{-x^2-x}{3x^2+6x+3}\quad c)\ \lim_{x\to -1}\frac{-x^2-x}{3x^2+6x+3}$$

a) $\lim_{x\to 0}\frac{-x^2-x}{3x^2+6x+3}=\frac{-0^2-0}{3\cdot 0^2+6\cdot 0+3}=\frac{0}{3}=\boxed{0}$

Punto de continuidad.



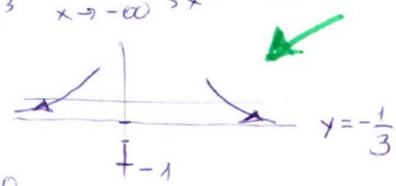
b) $\lim_{x\to +\infty}\frac{-x^2}{3x^2}=\frac{-1}{3}$. $\boxed{A.H.\ y=-\frac{1}{3}}$

Dif: $f(x)-A.H.=\frac{-x^2-x}{3x^2+6x+3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=$

$=\frac{\cancel{-x^2}-x+\cancel{x^2}+2x+1}{3x^3+6x+3}=\frac{x+1}{3x^3+6x+3}$

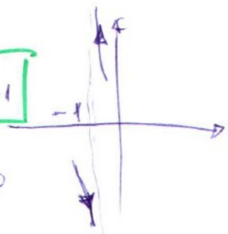
$\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{3x^3+6x+3}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{3x^3}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{3x^2}=\frac{1}{+\infty}=0^+$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{3x^2}=\frac{1}{+\infty}=0^+$



c) $\lim_{x\to -1}\frac{-x^2-x}{3x^2+6x+3}=\frac{-1-(-1)}{3\cdot 1-6+3}=\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to -1}\frac{-x\cancel{(x+1)}}{3\cancel{(x+1)}(x+1)}=\frac{+1}{0}=\infty$. $\boxed{A.V.\ x=-1}$



	3	6	3
-1		-3	-3
	3	3	0

$\lim_{x\to -1^-}\frac{-x}{3(x+1)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

$\lim_{x\to -1^+}\frac{-x}{3(x+1)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

11. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

$a)\dfrac{x-2}{x-1}$; $\quad b) x+\ln x$; $\quad c) \left(x^2-3x+2\right)^3$; $\quad d) 3\,\text{sen}\,x\cos x$

a) $f'(x) = \dfrac{1\cdot(x-1)-(x-2)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1-x+2}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

b) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

c) $f'(x) = 3(x^2-3x+2)^2\cdot(2x-3)$

d) $f'(x) = 3\cos x \cos x + 3\,\text{sen}\,x(-\text{sen}\,x) = 3\cos^2 x - 3\,\text{sen}^2 x$

12. Calcula los valores significativos de la siguiente función: extremos relativos, puntos de corte con los ejes, ramas infinitas. Según dichos cálculos represéntala.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

a)

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

$3x^2 - 8x + 4 = 0 \; ; \; x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6} =$

$= \dfrac{8 \pm \sqrt{16}}{6} = \dfrac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} \dfrac{12}{6} = 2 \\ \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

+	máx	−	mín	+	f'
↗	$2/3$	↘	2	↗	f

$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 4 > 0$

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 4 = -1 < 0$

$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 4 = 7 > 0$

$\lim_{x \to -\infty} x^3 - 4x^2 + 4x = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x^3 - 4x^2 + 4x = +\infty$

b) Cortes:

$0 = x^3 - 4x^2 + 4x \; ; \; x(x^2 - 4x + 4) = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

$(0,0)$

$(2,0)$

	X	Y
corte	0	0
mín corte	2	0
máx	$2/3$	$32/27$
	$-\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$